تابع زتای ریمان

نوشتهٔ

شاهپور نصرتی

تاریخ شروع

شهریور ۱۳۷۸

مهرماه ۱۳۸۴

فهرست مندرجات

۱.۰ مقدمه و مروری بر تابع زتا

۱.۱.۰ مقدمه

تابع زتای ریمان از توابع خاص ریاضی فیزیک است که با نتایج عمیقی از اعداد اول نیز در ارتباط است. این تابع که با تابع گاما پیوند می خورد، از مباحث مهم نظریه اعداد نیز بشمار می رود. بعلاوه فرض مطرح شده توسط ریمان نیز تاکنون بدون اثبات باقی مانده است. مطالب زیر مروری است بر آنچه تاکنون درباره این تابع و خواص آن نگاشته شده است.

در ابتدای قرن بیستم، ریاضیدان بزرگ انگلیسی هیلبرت ۲۳ مسئلهٔ حل نشده در ریاضی را بعنوان مسائل حل نشده و مورد بحث قرن مطرح کرد و تعدادی از مسائل در خلال قرن توسط برخی از ریاضیدانان حل شد. دو مسئله از آنها مشکل تر از بقیه بنظر می رسیدند:

اول: حدس فرما که بیان می کند معادلهٔ $x^n + y^n = z^n$ برای $n > ۲$ جواب (x, y, z) با مختصات طبیعی ندارد. این مسئله در ۱۹۹۴م. توسط ویلز($Wiles$) ثابت شد.

دوم: فرض ریمان که بیان می کند صفرهای غیربدیهی تابع زتا روی خط $\frac{۱}{۲} + it, t \in \mathbb{R}$ قرار می گیرند.

۲.۱.۰ ریمان کی بود؟

برنارد ریمان [۱] در ۱۷ سپتامبر ۱۸۲۶م. در آلمان تولد یافت و در گوتینگن زیر نظر گاوس [۲]، برلین دیریکله [۳] و آیزنشتاین [۴] و ژاکوبی [۵] درس خواند. در ۱۸۵۱م. $Ph.D.$ خود را زیر نظر استاد راهنمایش گاوس به نام **سطوح ریمان**[۶] به پایان رساند. سخنرانی ریمان در هندسه ریمانی [۷] در ۱۸۵۹م. در آکادمی علوم برلین تحت عنوان **اعداد اول کمتر از مقداری مفروض** ایراد نمود. در ۱۸۶۲م. با الیس کوچ ازدواج نمود و صاحب یک بچه شد. ریمان در ۲۰ ژولای ۱۸۶۶م. در توربو کولیس ایتالیا [۸] فوت کرد.

---

[۱] $Georg\ Friedrich\ Bernhard\ Riemann$ (۱۸۲۶ – ۱۸۶۶)

[۲] $Gauss$

[۳] $Dirichlet$

[۴] $Eisenstein$

[۵] $Jacobi$

[۶] $Riemann\ Surfaces$

[۷] $Riemaniann\ Geometry$

[۸] $Tuberculosis\ in\ Italy$

خصوصیات مقاله ۱۸۵۹ ریمان:

آ) روی اعداد اول بود که کمتر از یک مقدار داده شده اند.

ب) ریمان کارش را تنها در حیطهٔ اعداد اول انجام داد.

ج) هرچند هدف ارائهٔ فرمولی برای تعداد اعداد اول $\pi(x) = \#$ بود اما جزئیات بسیاری را آشکار کرد.

د) روشهای نظری را پایه ریزی کرد که مبنای نظریه اعداد امروزی شد.

ه) اکثر نتایج مقاله در ۴۰ سال بعدی اثبات شد.

۳.۱.۰ تاریخچه

نیکولاس اورسمی [۹] نشان داد که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \zeta(1)$ واگراست و منگولی [۱۰] نیز نشان داده بود که $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست. بعلاوه استرلینگ [۱۱] در ۱۷۳۶ مقدار $\zeta(2)$ را تا ۹ رقم اعشار بدست آورده بود. لئونارد اویلر[۱۲] طی دهه های ۱۷۳۰ و ۱۷۴۰ بر روی همگرایی سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \zeta(4)$ کار می کرد. در ۱۷۳۴ اویلر پس از چند بار محاسبه بطرق مختلف و بکارگیری تجزیه چندجمله ایها، طی نامه ای به دانیل برنولی اثباتی از $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ و $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ را ارائه داد و در همان سال مقاله ای به نام «تاملات مختلف در باب سریهای بی‌نهایت» منتشر کرد و رابطهٔ معروف زیر را که به«تجزیه ضربی اویلر» معروف است را اثبات نمود:

$$\zeta(s) = \frac{2^s 3^s 5^s \ldots}{(2^s - 1)(3^s - 1)(5^s - 1)\ldots}$$

در ۱۷۴۰ اویلر مقادیر $\zeta(s)$ را برای $s = 2n$ محاسبه نمود. وی بطور کلی می نوشت $\zeta(n) = N\pi^n$ که اگر n زوج باشد N عددی گویاست و اگر n فرد باشد حدس می زد که N می بایست تابعی از $\log(2)$ باشد و این نتایج را طی مقاله ای به چاپ رساند. در ۱۷۴۹ اویلر در مقاله ای تابع بازگشتی زیر را بیان نمود که در سال ۱۸۵۹ توسط ریمان ثابت شد [۳۰].

$$\zeta(1 - s) = \pi^{-s} 2^{1-s} \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \zeta(s)$$

[۹] $Nicholas\ Oresme(1323 - 1382)$
[۱۰] $Pietro\ Mengoli(1625 - 1680)$
[۱۱] $James\ Stirling(1692 - 1770)$
[۱۲] $Leonhard\ Euler(1707 - 1783)$

۴.۱.۰ تعریف

تابع زتای ریمان برای $x > ۱$ حقیقی بصورت زیر تعریف می شود [۱]:

$$\zeta(x) = \frac{۱}{\Gamma(x)} \int_{۰}^{\infty} \frac{u^{x-۱}}{e^u - ۱} du$$

که $\Gamma(x)$ تابع گامای اویلر است. این انتگرال بعنوان انتگرال لبگ موجود می باشد. اگر $x = n$ عددی صحیح باشد، داریم:

$$\frac{u^{n-۱}}{e^u - ۱} = \frac{e^{-u}u^{n-۱}}{۱ - e^{-u}} = e^{-u}u^{n-۱} \sum_{k=۰}^{\infty} e^{-ku} = \sum_{k=۱}^{\infty} e^{-ku}u^{n-۱}$$

بنابراین:

$$\int_{۰}^{\infty} \frac{u^{n-۱}}{e^u - ۱} du = \sum_{k=۱}^{\infty} \int_{۰}^{\infty} e^{-ku}u^{n-۱} du$$

با تغییر متغیر $y = ku$ داریم $dy = kdu$ پس :

$$\zeta(x) = \frac{۱}{\Gamma(x)} \sum_{k=۱}^{\infty} \int_{۰}^{\infty} e^{-ku}u^{n-۱} du$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(x)} \sum_{k=۱}^{\infty} \int_{۰}^{\infty} e^{-y} (\frac{y}{k})^{n-۱} \frac{dy}{k}$$

$$= \frac{۱}{\Gamma(x)} \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^n} \int_{۰}^{\infty} e^{-y}y^{n-۱} dy$$

چون انتگرال داخلی، مستقل از k و برابر $\Gamma(x)$ است، نتیجه می گیریم

$$\zeta(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^n}$$

این شکل از تابع زتا که برای nهای صحیح بدست آمده در حالت s حقیقی بصورت زیر تعریف می‌شود: $\zeta(s) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{k^s}$ که برای $s > ۱$ بطور مطلق همگراست [۱].

نکته: تعریف دیگری از تابع زتا در صفحهٔ مختلط چنین بیان می شود:

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(۱ - s)}{۲\pi i} \int_{\gamma} \frac{(-u)^s}{e^u - ۱} \frac{du}{u} \quad , \quad s \neq ۱$$

که γ کنتوراست که...

اویلر مقادیر $\zeta(۲)$ تا $\zeta(۲۶)$ را برای nهای زوج بدست آورد، همچنین ثابت کرد:

$$\zeta(۲) = \frac{\pi^۲}{۶} \qquad \zeta(۴) = \frac{\pi^۴}{۹۰} \qquad \zeta(۶) = \frac{\pi^۶}{۹۴۵}$$

اشتیلیس(۱۹۹۳) مقادیر $\zeta(۲)$ تا $\zeta(۷۰)$ را تا ۳۰ رقم اعشار تعیین نمود. از طرفی می توان برای n صحیح زتا را بصورت زیر تعریف نمود:

$$\zeta(n) = \underbrace{\int_۰^۱ \int_۰^۱ ... \int_۰^۱}_{n\ factor} \frac{dx_۱...dx_n}{۱ - x_۱...x_n}$$

توجه کنید که برای $n = ۱$ تابع دارای نقطه منفرد $singularity$ بوده و $\zeta(۱)$ همان سری همساز واگراست. بعلاوه:

$$\sum_{n=۲,۴,...}^{\infty} [\zeta(n) - ۱] = \frac{۳}{۴} \ , \ \sum_{n=۲}^{\infty}[\zeta(n) - ۱] = ۱$$

$$\sum_{n=۱,۳,...}^{\infty} [\zeta(n) - ۱] = \frac{۱}{۴} \ , \ \sum_{n=۲}^{\infty}(-۱)^n[\zeta(n) - ۱] = \frac{۱}{۲}$$

نمودار $\zeta(s)$ برای s حقیقی بصورت زیر است و

$$\zeta(۰) = \frac{-۱}{۲} \qquad \zeta'(۰) = \frac{-۱}{۲} log(۲\pi)$$

همچنین $\zeta(-۱) = \frac{-۱}{۱۲}$ نیز نتیجهٔ عمیقی از نظریهٔ نرمالسازی مجدد [13] است [$Elisa,\ et\ al$ ۱۹۹۴].

تابع زیر که به تابع زتای ریمان [14] موسوم است، برای s حقیقی چنین تعریف می شود:

$$\zeta(s) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^s}$$

این تابع در ناحیه $s > ۱$ تحلیلی است. تابع زتا برای مقادیر مختلط نیز چنین تعریف می شود و بجای متغیر z از s بکار می برند که همان نمادی است که ریمان در مقاله اش ۱۸۵۹ بکار برد. سری با $\sigma > ۱$ که $s = \sigma + it$ مطلقاً همگراست. به هرحال از ادامهٔ تحلیلی [15] یکتای تابع زتا، این تابع بر صفحهٔ مختلط (بجز نقطهٔ $s = ۱$) تعریف می شود، و در $s = ۱$ دارای قطب

[13] $Renormalization$
[14] $Riemann\ Zeta\ Function$
[15] $Analytic\ Continuation$

ساده با باقیماندهٔ ۱ است. بالاخص داریم:

$$lim_{s\to 1}[\zeta(s)-\frac{1}{s-1}]=\gamma$$

که γ ثابت اویلر—ماشرونی [۱۶] است. برای انجام ادامه تحلیلی بودن زتا در صفحهٔ $\Re(s)>0$ می نویسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-s}+\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=2\sum_{n=2,4,\dots}^{\infty}n^{-s}=2\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^{-s}=2^{(1-s)}\sum_{k=1}^{\infty}k^{-s}$$

بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-s}+\zeta(s)=2^{1-s}\zeta(s)$$

یا

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\qquad(*)$$

لذا وقتی $\zeta(s)$ برای $\Re(s)>0$ تعریف می شود، معادلهٔ تابعی ایجاب می کند که این پیوستگی به تمام صفحهٔ مختلط گسترش یابد. مجموع در طرف راست $(*)$ را تابع اتای دیریکله نامیده و با $\eta(s)$ نشان می دهند. تابع زتای ریمان با تابع لاندای دیریکله $\lambda(s)$ و تابع اتای دیریکله $\eta(s)$ چنین مرتبط می شود:

$$\frac{\zeta(s)}{2^s}=\frac{\lambda(s)}{2^s-1}=\frac{\eta(s)}{2^s-2}$$

و نیز $\zeta(s)+\eta(s)=2\lambda(s)$. یک سری که بطور سرتاسری همگراست، را میتوان بصورت زیر ارائه کرد

$$\zeta(s)=\frac{1}{1-2^{1-s}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(k+1)^{-s}$$

که $\binom{n}{k}$ ضرایب دوجمله‌ای است. تابع زتا با تابع لیوویل $\lambda(n)$ چنین مرتبط است،

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s}$$

بعلاوه

$$\frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\omega(n)}}{n^s}$$

[۱۶] $Euler-Mascheroni\ Constant$

که $\omega(n)=\sigma_{0}(n)$ تعداد فاکتورهای اول متفاوت n است.

تابع زتا با تابع گاما بصورت زیر مرتبط است:

$$\Gamma(\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\Gamma(\frac{1-s}{2})\pi^{-\frac{1-s}{2}}\zeta(1-s)$$

برای nهای زوج از طریق انتگرالگیری کانتور [۱۷] یا قضیهٔ پارسوال می توان با اختصاص ضرایب فوریه $\zeta(n)$ را محاسبه نمود. اما می توان گفت بهترین روش برای بدست آوردن مقادیر $\zeta(n)$ برای $n=2k$ صحیح از طریق اعداد برنولی بدست می آید. ابتدا دنباله بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$B_{0}=1 \quad , \quad B_{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k}$$

چند جمله ابتدایی این دنباله عبارتند از:

$$1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{6}, 0, \frac{-1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, \frac{-1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, \ldots$$

حال تعریف می کنیم:

$$\zeta(2k)=(-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}B_{2k}}{2(2k)!}$$

که نشان می دهد $\zeta(n)$ برای nهای زوج متعالی است. همچنین

$$\zeta(-n)=-\frac{B_{n+1}}{n+1} \quad , \quad n=1,3,5,\ldots$$

که مقادیر تابع زتا را برای اعداد زوج بدست می دهد ولی برای اعداد فرد باتوجه به صفر بودن B_{2k+1} برای زتای فرد جوابی بدست نمی آوریم حتی نمی دانیم که $\zeta(2k+1)$ گویاست یا گنگ. آپری [۱۸] (۱۹۷۹) بالاخره ثابت کرد که $\zeta(3)$ گنگ است، اما هیچ نتیجهٔ مشابهی برای nهای فرد دیگر حاصل نشد. بخاطر کشف مهم آپری $\zeta(3)$ اغلب به عنوان ثابت آپری [۱۹] شناخته می شود. ری وال *Rivoal* و بال *Ball* در سال ۲۰۰۱ ثابت کردند که تعداد نامتناهی اعداد صحیح n چنان هست که

[۱۷] *Contour Integration*
[۱۸] *Apery*
[۱۹] *Apery′sConstant*

$\zeta(2n+1)$ گنگ است. علاوه بر این:

$$\zeta(3) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{k^2}$$

که h_k یک عدد هارمونیک است [$Stark$ ۱۹۷۴]. یک تعداد از مجموعهای مهم $\zeta(n)$ با $n > 1$ طبیعی را با استفاده از ضرایب دوجمله ای می توان بصورت زیر بیان نمود، که آپری با کمک $\zeta(3)$ به آنها دست یافت[Guy(۱۹۹۴, p۲۵۷)]:

$$\zeta(2) = 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^2\binom{2k}{k}} \quad , \quad \zeta(3) = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^3\binom{2k}{k}}$$

$$\zeta(4) = \frac{36}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^3\binom{2k}{k}} \quad , \quad \zeta(5) = z_5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^5\binom{2k}{k}}$$

که در نتیجهٔ آخر z_5 یک عدد گویا یا جبری است، اما اگر z_5 یک ریشه چند جمله ای درجه ۲۵ یا کمتر باشد، بنابراین نرم اقلیدسی ضرایب باید بزرگتر از 2×10^{37} باشد [20] لذا چنین مجموعهایی برای $n \geq 5$ نیز شناخته می‌شوند. با استفاده از الگوریتم LLL، پلوفه مجموع های متناهی زیبائی برای $\zeta(n)$ با n های فرد بصورت زیر بدست آورد:

$$S_{\pm}(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n(e^{2k\pi}\pm 1)}$$

و برای مثال

$$\zeta(3) = \frac{7}{180}\pi^3 - 2S_-(3)$$

$$\zeta(5) = \frac{1}{294}\pi^5 - \frac{72}{35}S_-(5) - \frac{2}{35}S_+(5)$$

تابع زتای ریمان را می توان بصورت

$$\int_0^{\infty} frac(\frac{1}{t})t^{s-1}dt = \frac{-\zeta(s)}{s}$$

برای $0 < \Re(s) < 1$ بکار برد که $frac(x)$ همان قسمت اعشاری x است [۱۷].

حد مجموع زیر نیز برای $n = 3, 5, \ldots$ بیانگر تابع زتاست:

$$\zeta(n) = lim_{x\to\infty}\frac{1}{(2x+1)^n}\sum_{k=1}^{x}[cotg(\frac{k}{2x+1})]^n$$

[20] $Baily$ & $Plouffe$

مشتق تابع زتا را چنین می نویسیم:

$$\zeta'(s) = -s\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s} lnk = -\sum_{k=2}^{\infty}\frac{lnk}{k^s}$$

و وقتی که $s \to 0$ داریم $\zeta'(0) = \frac{-1}{2}ln(2\pi)$ و نیز

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = log2\pi + \frac{\pi}{2}cotg(\frac{\pi s}{2}) - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}$$

و

$$\zeta(2m+1) = \frac{2^{2m+1}\pi^{2m}(-1)^m\zeta'(-2m)}{(2m)!}$$

و از خواص دیگر از آنجا که

$$|\Gamma(\frac{s}{2})| < ke^{A\sigma log\sigma}$$

برای ثوابتی مانند A, k و $\sigma > 0$، و نیز وقتی $s \to \infty$ ، $log\Gamma(\frac{s}{2}) \sim \frac{s}{2}logs$ بنابراین

$$|\zeta(s)| < \frac{k_1|s|^2}{|s-1|} \qquad \exists k_1 > 0$$

نتایج رایانه ای نشان می دهد که

$$\zeta(1) = \infty$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\zeta(3) = 1.202056903 2\ldots$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\zeta(5) = 1.0369277551\ldots$$

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

$$\zeta(7) = 1.0083492774\ldots$$

$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

$$\zeta(۹) = ۱.۰۰۲۰۰۸۳۹۲۸\ldots$$

$$\zeta(۱۰) = \frac{\pi^{۱۰}}{۹۳۵۵۵}$$

۲.۰ معادله تابعی تابع زتا

معادله تابعی زیر را ξ–تابع ریمان گویند که تابعی تام از مرتبه ۱ است.

$$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{۲}}\Gamma(\frac{s}{۲})\zeta(s)$$

و اگر تعریف کنیم $\Phi(s) = \frac{۱}{۲}s(s-۱)\xi(s)$ آنگاه $\Phi(s)$ در صفحه مختلط تام است و $\Phi(s) = \Phi(۱-s)$. از اینجا با بینهایت بودن تابع گاما می توان تعدادی از صفرهای تابع زتا را بدست آورد. لذا $s = -۲, -۴, -۶, \ldots$ قطب های گاما بوده و بنابراین صفرهای زتا می باشند که به آنها **صفرهای بدیهی** [۲۱] گویند. از طرفی معادلهٔ تابعی مشخص تقارن نسبت به خط $s = \frac{۱}{۲}$ را داشته، که به آن **خط بحرانی**[۲۲] گویند. همچنین معادلهٔ تابعی قسمت $\sigma > ۱$ را به $\sigma < ۰$ می نگارد، بنابراین ناحیهٔ باقی مانده $۰ < \sigma < ۱$ را ناحیه بحرانی نامند. حاصلضرب اویلر نیز نشان می دهد که در ناحیه $\sigma > ۱$ صفری وجود ندارد، لذا $\sigma < ۰$ نیز ناحیه‌ای بدون صفر است. بنابراین تمام صفرهای نابدیهی در نوار بحرانی قرار دارند. ریمان ادعا کرد

$$\xi(s) = \xi(۰)\prod_{p}(۱ - \frac{s}{p})$$

که در ۱۸۹۳ توسط هادامارد ثابت شد. در مسیر اثبات این بود که ریمان فرض خود را مطرح کرد.

۱.۲.۰ تابع زتای ریمان

تابع زتای ریمان توسط فرمول

$$\zeta(s) = \sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{n^s} = \prod_{p}(۱ - p^{-s})^{-۱}$$

که $s = \sigma + it$. سری برای $\sigma > ۱$ مطلقاً همگراست. نماد $s = \sigma + it$ به عنوان یک عدد مختلط برای اولین بار توسط ریمان بکار گرفته شد.

---
[۲۱] *Trivial Zeros*
[۲۲] *Critical Line*

۲.۲.۰ تابع زتای ددکیند

تابع زتای ددکیند روی میدان اعداد K (یک توسیع متناهی از اعداد گویا)، با حلقه اعداد صحیح $\mathcal{O}_K$ توسط فرمول زیر تعریف می شود:

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s}$$

برای $\sigma > ۱$، وقتی مجموع روی همهٔ ایدآلهای صحیح $\mathcal{O}_K$ بوده و $N\mathfrak{a}$ نرم $\mathfrak{a}$ است.

۳.۲.۰ حاصلضرب اویلر

فرمول حاصلضرب اویلر نمایشی از یک L–تابع است که بصورت حاضربی نامتناهی از اعداد اول بیان می گردد. حاصلضرب اویلر که در ۱۷۳۷ بدست آمد، برای تابع زتای ریمان چنین است [۳۰]:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(۱ - p^{-s}\right)^{-۱}$$

که اویلر آن را در ۱۷۳۷ ثابت کرد:

$$\zeta(x)(۱ - ۲^{-x}) = (۱ + \frac{۱}{۲^x} + \frac{۱}{۳^x} + \ldots)(۱ - \frac{۱}{۲^x}) = (۱ + \frac{۱}{۲^x} + \frac{۱}{۳^x} + \ldots) - (\frac{۱}{۲^x} + \frac{۱}{۴^x} + \ldots) \qquad (۱)$$

$$\zeta(x)(۱ - ۲^{-x})(۱ - ۳^{-x}) = (۱ + \frac{۱}{۳^x} + \frac{۱}{۵^x} + \frac{۱}{۷^x} + \ldots) - (\frac{۱}{۳^x} + \frac{۱}{۹^x} + \frac{۱}{۱۵^x} + \ldots) \qquad (۲)$$

$$\zeta(x)(۱ - ۲^{-x})(۱ - ۳^{-x})\ldots(۱ - p^{-x})\ldots = \zeta(x)\prod_{n=۲}^{\infty}(۱ - p^{-x}) = ۱ \qquad (۳)$$

که برای pهای اول نتیجه حاصل می شود. گاهی نیز آنرا چنین می نویسند:

$$\zeta(s) = (۱ - ۲^{-s})^{-۱} \prod_{q \equiv ۱ (mod\ ۴)} \left(۱ - q^{-s}\right)^{-۱} \prod_{r \equiv ۳ (mod\ ۴)} \left(۱ - r^{-s}\right)^{-۱}$$

حاصلضرب اویلر برای L–تابع دیریکله چنین است:

$$L(s, \chi) = \prod_p \left(۱ - \chi(p) p^{-s}\right)^{-۱}$$

حاصلضرب اویلر برای تابع زتای ددکیند روی میدان اعداد K چنین است:

$$\zeta_K(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(۱ - N\mathfrak{p}^{-s}\right)^{-۱}$$

که حاصلضرب روی ایده‌آل های اول $\mathcal{O}_K$ است. روابط دیگری را می توان در [۳] یافت.

۴.۲.۰ مطالب دیگر

درباره تابع زتای ریمان و توابع دیگر وابسته به آن و نتایج بدست آمده از این توابع نظیر صفرهای لانداو—سیگل [۲۳]، حدسهای سلبرگ [۲۴]، رده های سلبرگ [۲۵] و ... را می توان در [۲] یافت.

۵.۲.۰ صفرهای واقع بر $\sigma = ۱$

طبق حاصلضرب اویلر L–تابع $L(s)$ در نیم صفحه $\sigma > ۱$ صفر نخواهد شد. لذا ساده ترین نتیجه برای وجود صفرهای $L(s)$ روی خط $\sigma = ۱$ اینست که این تابع بر این خط صفر نیست. بنابر قضیهٔ اعداد اول کلاسیک

$$\pi(x) := \sum_{p\leq X} ۱ \sim \frac{X}{\log X}$$

که جمع روی اعداد اول p است، و طبق این فرمول $\zeta(s) \neq ۰$ برای $\sigma = ۱$. بنابراین با ناصفر شدن آن می توان قضیه تاوبریان[۲۶] را برای ζ'/ζ بکار برد. قضیه تاوبریان نیازمند آنست که ζ'/ζ روی $\sigma = ۱$ منظم باشد، بجزبرای قطب $s = ۱$. قضیهٔ اعداد اول برای $\zeta(s)$ توسط هادامارد [۲۷] و پویسین [۲۸] در ۱۸۹۶ ثابت شد. واینر [۲۹] نشان داد که قضیهٔ اعداد اول بطور تحت اللفظی معادل با این موضوع است که $\zeta(s)$ هیچ صفری روی $\sigma = ۱$ ندارد [۳۰].

---

[۲۳] $Landau - Siegelzeros$
[۲۴] $Selberg\ Conjectures$
[۲۵] $Selberg\ class$
[۲۶] $Tauberian\ theorem$
[۲۷] $Hadamard$
[۲۸] $de\ la\ Valee\ Poissin$
[۲۹] $Wiener$

۳.۰ فرض ریمان

۱.۳.۰ فرض ریمان

فرض ریمان RH [۳۰] ادعا می کند که صفرهای غیربدیهی تابع $\zeta(s)$ بر روی خط بدیهی $\sigma = \frac{۱}{۲}$ قرار می گیرند [۸و ۹]. این فرض که تاکنون بدون اثبات باقی مانده، توسط ریمان در یادداشت ۸ صفحه ای اش در باب $\pi(x)$ در ۱۸۵۹ مطرح شد[۷]. از آنجا که $\xi(\frac{۱}{۲} + it)$ برای $t \in \mathbb{R}$ حقیقی است پس برای بدست آوردن صفرها کافیست وقتی t را افزایش می دهیم تغییر علامت ξ را در نظر بگیریم. لذا می توان نشان داد که صفرهای $\xi(\frac{۱}{۲} + it)$ همان صفرهای تابع $Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\xi(\frac{۱}{۲} + it)$ هستند. پس با محاسبهٔ $\xi(\frac{۱}{۲} + it)$ توسط اویلر–مکلوران میتوان $\vartheta(t)$ را چنین بدست آورد:

$$\vartheta(t) = \frac{t}{۲}log(\frac{t}{۲\pi}) - \frac{t}{۲} - \frac{\pi}{۸} + \frac{۱}{۴۸t} + \frac{۷}{۵۷۶۰t^۳} + \dots$$

در ۱۹۳۲ کارل سیگل [۳۱] با بررسی نوشتجات ریمان که در آرشیو دانشگاه گوتینگن عنوان نمود که ریمان تعدادی از صفرهای کوچک را با محاسبات عددی تا چند رقم اعشار بدست آورده است [۲۰و ۲۹]. سیگل همچنین فرمول تقریبی زیر را که توسط ریمان بدست آمده بود را کشف کرد:

$$Z(t) = \sum_{n=۱}^{N} n^{-\frac{۱}{۲}} cos[\vartheta(t) - tlogn] + R(t) \quad , \quad N = int[\sqrt{\frac{t}{۲\pi}}]$$

که در آن

$$R(t) = \frac{e^{-i\vartheta(t)}e^{-t\frac{\pi}{۲}}}{(۲\pi)^{\frac{۱}{۲}+it}e^{-i\frac{\pi}{۴}}(۱ - ie^{-t\pi})} \int_{\gamma} \frac{e^{-Nx}(-x)^{-\frac{۱}{۲}+it}}{e^x - ۱}dx$$

توابع $\vartheta(t)$ و $Z(t)$ را توابع ریمان–سیگل [۳۲] می نامند. اما یک نتیجه از کشف سیگل این است که برای ارزیابی $Z(t)$ تنها به $t^{\frac{۱}{۲}}$ عمل احتیاج دارد در صورتی که بسط اویلر–مکلوران به t عمل احتیاج دارد. اما آنچه راجع به صفرها می توان گفت:

- معادلهٔ تابعی زتا نشان می دهد که صفرها بطور متقارن در دو طرف خط $\Re(s)$ قرار می گیرند. لذا اگر s صفر غیربدیهی باشد، $۱ - s$ نیز صفر غیربدیهی است.

---

[۳۰] Riemann Hypothesis

[۳۱] Carl L. Siegel

[۳۲] Riemann – Siegel function

• از فرمول تابعی زتا براحتی می بینیم که $\zeta(\overline{s}) = \overline{\zeta(s)}$ پس اگر s ریشهٔ زتا باشد، $\overline{s}$ نیز ریشهٔ زتا است، و همچنین $\overline{1-s}$ نیز ریشه خواهد بود.

هیلبرت در ۱۹۰۰ مسئله اثبات یا رد فرض ریمان را به عنوان یکی از مهمترین مسائل برای ریاضیدانان قرن بیستم ذکر کرد. این فرض نظر بسیاری از دانشمندان را به خود جلب کرد و مطالب بسیاری را در باب توزیع صفرهای تابع زتای ریمان آشکار نمود. نتایج قبلی در مورد فرض ریمان اینچنین هستند: با جمعبندی اویلر—مکلوران حدود $|s|$ عمل مورد نیاز است که $\zeta(s)$ را ارزیابی کنیم. در ۱۹۰۳ گرام [۳۳] اولین ۱۵ صفر را در نوار بحرانی یافت و نشان داد که همگی آنها در خط بحرانی قرار دارند و لذا فرض ریمان تا $T = ۵۰$ ثابت شد. در ۱۹۱۲ بکلوند [۳۴] تا ارتفاع $T = ۲۰۰$ فرض را بررسی کرد. در ۱۹۱۵ هاردی [۳۵] ثابت کرد که بی نهایت صفر بر خط بحرانی $\sigma = \frac{1}{2}$ قرار دارد. در ۱۹۲۱ هاردی و لیتلوود نشان دادند که اگر T به قدر کافی بزرگ باشد تعداد صفرهای واقع بر پاره‌خط بین $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} + iT$ ، بازای ثابتی چون A، دست کم مساوی AT است. در ۱۹۲۵ هاچینسون [۳۶] فرض را تا ارتفاع $T = ۳۰۰$ بررسی نمود. در ۱۹۴۲ سلبرگ این مطلب را با نشان دادن اینکه این عدد، بازای $A > 0$ی حداقل مساوی $AT \log T$ است، اصلاح کرد. همچنین معلوم شد که این عدد در نوار بحرانی $0 < \sigma < 1$ که در آن $0 < t < T$، وقتی $T \to \infty$، با $T \log \frac{T}{2\pi}$ مجانب است. لذا سلبرگ نشان داد که کسر مثبتی از صفرها بر خط بحرانی قرار دارند. در ۱۹۵۰ آ. تورینگ [۳۷] مقادیر $\zeta(\frac{1}{2} + it)$ را برای مقادیر $۲۴۹۳۷ < t < ۲۵۷۳۶$ توسط کامپیوتر الکترونیکی نوع I منچستر امتحان نمود و روش ساده تری را برای تعیین ریشه های تا ارتفاع T بصورت زیر یافت:

$$S(t) = N(t) - \frac{\vartheta(t)}{\pi} - 1$$

سپس

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} S(t)dt\right| \leq 2.30 + 0.128 log(\frac{t_2}{2\pi})$$

تورینگ ۱۲۱۹۳۸۷۴ صفر $Z(t)$ را برای $0 < t < ۶۰۰۰۰۰۱$ بدست آورد و نشان داد که همگی بر خط بحرانی قرار دارند. تورینگ با این روش ۲۷ درصد صفرها را بدست آورد. در ۱۹۷۴ لوینسون [۳۸] نشان داد که این کسر دست کم $\frac{7}{10}$ است. یعنی ثابت قضیه سلبرگ در $A \geq \frac{7}{20\pi}$ صدق می کند. همچنین لوینسون نشان داد که حداقل $\frac{1}{3}$ صفرها می بایست بر خط بحرانی

[۳۳] J. Gram
[۳۴] R. Backlund
[۳۵] G. Hardy
[۳۶] J.Hutchinson
[۳۷] Toring
[۳۸] Levinson

قرار گیرند. نتایج بعدی، این عدد را تا ۴۰ درصد ارتقاء داد. محاسبات دیگری توسط دیگران از تعداد و مقدار صفرها توسط گرام، بکلوند، لمر، هیزل گرو، روسر، یوهه، شوئنفلد و دیگران تعداد بسیار زیادی از صفرهای را آشکار کرد و امروزه نیز با ابرکامپیوترها براحتی می توان صفرهای زیادی از تابع را یافت. فرض ریمان برای اولین ۱۰۰و۰۰۰و۲۰۰ صفر توسط کامپیوتر بررسی شده [۲۱] که ناحیه ای از صفحهٔ مختلط $\sigma+it$ در ناحیهٔ $0 < t < 81702130.19$ بدست آمد. ودنیسکی [۳۹] با استفاده از یک کامپیوتر IBM به نام زتاگرید [۴۰] اولین 25×10^9 صفر غیر بدیهی را بر خط بحرانی بدست آورد. این محاسبه نشان داد که فرض ریمان برای $t < 7092584323.448$ درست است. در ۱۹۸٦ ون دلون [۴۱] نشان داد که اولین ۱/۵ میلیارد صفر غیر بدیهی بر روی خط بحرانی واقع می شوند. در ۱۹۹۲ الیزکو [۴۲] تعداد 10^{20}امین صفر ریمان و ۱۷۵ میلیون همسایگی اش را یافت. اولین صفرها برای $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ چنین اند:

$$t_1 = 14.134725$$

$$t_2 = 21.022040$$

$$t_3 = 25.010858$$

$$t_4 = 30.424876$$

$$t_5 = 32935076 6$$

$$t_6 = 375861780$$

علاوه بر این تلاشها، این تفکر وجود دارد که ممکن است مثالهای نقضی برای فرض ریمان وجود داشته باشد. بالاخره اینکه سوالات دیگری نیز نظیر فضای همسایگی صفرها، وجود شکافهای بسیار کوچک و بسیار بزرگ بین صفرها، وجود همبستگی بین صفرها و غیره وجود دارد. این حدس نیز باقی است که صفرها ممکن است مقادیر ویژهٔ یک عملگر هرمیتی بوده و لذا حقیقی اند.

در سال ۲۰۰۰ موسسهٔ ریاضیات کلی [۴۳] جایزهٔ ۱ میلیون دلاری برای اثبات فرض ریمان اختصاص داد [۱۹و ۲۴]، البته اینکه با کامپیوتر بتوان یک صفر غیربدیهی یافت دارای جایزه نیست.

[۳۹] $S.\ Wedeniwski$
[۴۰] $ZetaGrid$
[۴۱] $Van\ de\ Lune\ et\ al$
[۴۲] $A.\ Odlyzko$
[۴۳] $ClayMathematicsInstitute$

۲.۳.۰ تعمیم تابع زتا

یک تعمیم از تابع زتا بصورت $\zeta(s,a)$ ارائه می شود که آنرا تابع زتای هورویتس [۴۴] نامند. داریم

$$\zeta(s,\circ) \equiv \zeta(s)$$

۳.۳.۰ تعمیم فرض ریمان (GRH)

تعمیمی از فرض ریمان [۴۵] بیان می کند که فرض ریمان درست بوده بعلاوه صفرهای نابدیهی از تمام L–توابع دیریکله بر خط بدیهی $\sigma = \frac{1}{2}$ قرار می گیرند. بطور معادل GRH ادعا می کند که صفرها نابدیهی از تمام L–توابع درجه ۱ بر خط بدیهی قرار می گیرند. فرض ریمان قوی ترین فرض ممکن درباره پخش افقی صفرهای نابدیهی L–توابع است.

۴.۳.۰ فرض عمومی اصلاح شده یا فرض ریمان برتر($MGRH$ یا GRH)

تعمیم هائی از تابع زتا ریمان بدست آمده که همانندی بین آنها و تابع زتا وجود دارد. این تعمیم ها تحت عنوان «زتا توابع» یا «L–توابع» شناخته می شوند. بنابر این فرض [۴۶] که بیان کلی تر از تعمیم فرض ریمان است، ادعا می کند که صفرهای غیربدیهی همه L–توابع خودریخت بر روی خط بدیهی واقعند. از آنجا که تفاوتی اساسی بین صفرهای واقع بر محورحقیقی و صفرهای نابدیهی با قسمت موهومی مثبت وجود دارد، لذا صفت «اصلاح شده» را برای داشتن صفرها بجز برای محور حقیقی اضافه می کنند. لذا $MGRH$ ادعا می کند که همه صفرهای غیربدیهی L–توابع دیریکله بر روی خط بدیهی یا بر روی محور حقیقی واقعند. یا بر محور حقیقی واقع می شوند. L–توابع دیریکله که بصورت

$$L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

تعریف می شوند، که در آن $\chi(n)$ مشخصه دیریکله است، در حالت خیلی خاص به تابع زتای ریمان $\zeta(s)$ تبدیل می شود و لذا$MGRH$ تعمیم کلی تر از آن بشمار می آید.

---

[۴۴] *Hurwitz zeta function*
[۴۵] *Generalized Riemann Hypothesis*
[۴۶] *The Grand Riemann Hypothesis*

۵.۳.۰ فرض عمومی توسعه یافته(ERH)

فرض ریمان اصلاح شده[۴۷] ادعا می کند که صفرهای غیربدیهی تابع زتای ددکیند از هر میدان جبری اعداد بر روی خط بدیهی واقع می شوند. نکته اینکه ERH، RH را نتیجه می دهد زیرا تابع زتای ریمان همان تابع زتای ددکیند برای نقاط‌گویاست.

۶.۳.۰ شبه فرض ریمان

شبه فرض ریمان[۴۸] برای $L(s)$ بدین معنی است که $L(s)$ در نیم صفحه $\sigma > \sigma_0$ که $\sigma_0 < 1$ دارای هیچ صفری نیست.

۴.۰ فرم های معادل در فرض ریمان

هرچند تاکنون فرض ریمان اثبات یا رد نشده است، لیکن در راه نیل به این مقصود، فرم ها یا گزاره های معادلی بدست آمده که اثبات یا رد آنها معادل اثبات یا رد فرض ریمان است. این فرم هارا در ذیل ذکر خواهیم کرد.

۱.۴.۰ تابع اتای دیریکله

تابع اتای دیریکله بصورت

$$\eta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

تعریف می شود. فرض ریمان معادل با آن است که همهٔ صفرهای تابع اتای دیریکله در نوار بحرانی $0 < \Re(s) < 1$ روی خط بحرانی $\Re(s) = \frac{1}{2}$ قرار بگیرند.

۲.۴.۰ هم ارزی با تعداد اعداد اول

این هم ارزی بیان می کند که برای یک ثابت cی داریم

$$|Li(x) - \pi(x)| \leq c \; lnx\sqrt{x}$$

که $Li(x)$ انتگرال لگاریتمی است و $\pi(x)$ تابع شمارش اعداد اول است [۴۷].

[۴۷] *The Extended Riemann Hypothesis*
[۴۸] *Quasi Riemann Hypothesis*

۳.۴.۰ هم ارزی روی $L^{۲}$

هم ارزی دیگری بیان می کند که

$$span_{L^{۲}(۰,۱)}\{\rho_\alpha, ۰ < \alpha < ۱\} = L^{۲}(۰,۱)$$

که $\rho_\alpha(t) \equiv frac(frac\alpha t) - \alpha frac(۱t)$ که $frac(x)$ قسمت کسری x است [۱۷].

۴.۴.۰ سری هاردی—لیتلوود

هاردی و لیتلوود[۴۹] [۹] نشان دادند که فرض ریمان معادل تقریب زیر است:

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!\zeta(۲k+۱)} \ll x^{-۱/۴}$$

که در آن $x \to \infty$.

۵.۴.۰ سری ریز

ریز [۲] ثابت کرد که اثبات فرض ریمان معادل اثبات گزاره زیر است.

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{k+۱}x^k}{(k-۱)!\zeta(۲k)} \ll x^{۱/۲+\epsilon}$$

۶.۴.۰ سری فاری

هم ارزی دنباله فاری[۵۰]: فرض کنید r_v عناصر دنباله فاری از مرتبه N باشد، با $v = ۱,۲,\ldots\Phi(N)$ که $\Phi(N) = \sum_{n=۱}^{N} \phi(n)$. فرض کنید $\delta_v = r_v - v/\Phi(N)$. فرض ریمان برقرار است اگر و فقط اگر

$$\sum_{v=۱}^{\Phi(N)} \delta_v^{۲} \ll N^{-۱+\epsilon}.$$

همچنین فرض ریمان برقرار است اگر و تنها اگر

$$\sum_{v=۱}^{\Phi(N)} |\delta_v| \ll N^{۱/۲+\epsilon}.$$

[۴۹] $Hardy - Littlewood$
[۵۰] $Farey$

۷.۴.۰ محک لی

خیان جی لی[۵۱] حدس زیر را ثابت کرد: فرض ریمان برقرار است اگر و تنها اگر $\lambda_n \geq ۰$ برای هر $n = ۱, ۲, \ldots$ که

$$\lambda_n = \sum_{\rho} (۱ - (۱ - ۱/\rho)^n)$$

و تعریف دیگری از λ_n چنین است

$$\lambda_n = \frac{۱}{(n-۱)!} \frac{d^n}{ds^n} (s^{n-۱} \log \xi(s))|_{s=۱}$$

و

$$\xi(s) = \frac{۱}{۲} s(s-۱)\Gamma(s/۲)\zeta(s)$$

۸.۴.۰ محک انتگرالی پولیا

پولیا [۱۰] تعدادی معیار انتگرالی را که از تبدیلات فوریه ای که فقط صفرهای حقیقی داشته باشند، بدست آمده را بیان می کند. یکی از آنها که برای ξ–تابع ریمان بکار می رود چنین است: فرض ریمان صحیح است اگر و تنها اگر

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha)\Phi(\beta) e^{i(\alpha+\beta)x} e^{(\alpha-\beta)y} (\alpha - \beta)^۲ \ d\alpha \ d\beta \geq ۰$$

که در آن

$$\Phi(u) = ۲ \sum_{n=۱}^{\infty} (۲n^۴ \pi^۲ e^{\frac{۹}{۲}u} - ۳n^۲ \pi e^{\frac{۵}{۲}u}) e^{-n^۲ \pi e^{۲u}}$$

و برای همهٔ x و y های حقیقی.

[۵۱] $Xian - Jin\ Li$

۹.۴.۰ محک نیومن

چارلی نیومن [۱۱] در یکی از کارهایش به نام دبروین [52] چنین تعریف می کند:

$$\Xi_\lambda(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{-\lambda t^2} e^{iz}\ dt$$

که

$$\Phi(t) = 2\sum_{n=1}^{\infty} (2n^4\pi^2 e^{\frac{9}{2}t} - 3n^2\pi e^{\frac{5}{2}t}) e^{-n^2\pi e^{2t}}.$$

توجه کنید که $\Xi_0(z) = \Xi(z)$. وی ثابت می کند که ثابت Λ (که$-1/8 \leq \Lambda < \infty$) چنان موجود است که $\Xi_\lambda(z)$ تنها دارای صفرهای حقیقی است اگر و فقط اگر $\lambda \geq \Lambda$. فرض ریمان معادل با آنست که $\Lambda \leq 0$. ثابت Λ (که نیومن آن را برابر صفر حدس زد)، اکنون ثابت دبروین—نیومن [53] نامیده می شود [۲۶]. الیزکو [54] اخیراً ثابت کرده که $-2.7 \times 10^{-9} < \Lambda$.

۱۰.۴.۰ نامساوی گرومر

فرض کنید:

$$-\frac{\Xi'}{\Xi}(t) = s_1 + s_2 t + s_3 t^2 + \ldots.$$

و M_n ماتریسی باشد که درآیه i,j آن برابر s_{i+j} باشد. گرومر [55] [۱۲] ثابت کرد که شرط لازم و کافی برای درست بودن فرض ریمان آنست که برای $n \geq 1$ داشته باشیم:

$$\det M_n > 0$$

۱۱.۴.۰ ماتریس ردهفر

ماتریس ردهفر[56] $A(n)$ ماتریسی $n \times n$ با درآیه‌های ۰ و ۱ است که $A(i,j) = 1$ اگر $j = 1$ یا i عاد کند j را، و در سایر موارد $A(i,j) = 0$. ردهفر ثابت کرد که $A(i,j)$ دارای $n - [n \log 2] - 1$ مقدار ویژه برابر یک است. بعلاوه $A(i,j)$ دارای

[52] $deBruijn$
[53] $deBruijn - Newman$
[54] $A.\ Odlyzko$
[55] $J.Grommer$
[56] $Redheffer$

یک مقدار ویژه (و در نتیجه شعاع طیفی) تقریباً برابر $\sqrt{n}$ و یکی دیگر $-\sqrt{n}$ و بقیه مقادیر ویژه کوچک هستند. فرض ریمان درست است اگر و فقط اگر برای هر $\epsilon > 0$،

$$\det(A) = O(n^{1/2+\epsilon})$$

فورکاد، رودنی و پلینگتون [۵۷] اثبات ساده ای از قضیهٔ ردهفر ارائه دادند و نیز ثابت کردند که شعاع طیفی $A(n)$ برابر $n^{1/2} + 12\log n + O(1)$ است. ووگان [۵۸] دامنهٔ مقادیر ویژه را با جمله خطای $O(n^{-2/3})$ تعیین نمود و نشان داد که مقادیر ویژه غیر بدیهی در حالت کلی $\ll (\log n)^{2/5}$ و در حالت فرض ریمان $\ll \log\log(2+n)$ هستند. محتمل است که مقادیر ویژه نابدیهی در قرص یکه قرار گیرند.

۱۲.۴.۰ نامساوی براساس مشتق $\xi(s)$

فرض ریمان درست است اگر و تنها اگر

$$\Re\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} > 0$$

که $\Re s > 1/2$ (ر.ک. $Hinkkanen$)[۱۳].

۱۳.۴.۰ محک آموروسو

آموروسو[۵۹] گزارهٔ جالب زیر را که معادل با فرض ریمان است ثابت کرده است. فرض کنید $\Phi_n(z)$، n امین چندجمله ای سیکلوتومیک [۶۰] بوده و $F_N(z) = \prod_{n\leq N}\Phi_n(z)$. فرض کنید:

$$\tilde{h}(F_N) = (2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}\log^+|F(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

آنگاه $\tilde{h}(F_n) \ll N^{\lambda+\epsilon}$ معادل با این ادعا است که تابع زتای ریمان برای $\mathrm{Re}\,z \geq \lambda+\epsilon$ صفر نخواهد شد.

[۵۷] $Forcade,\ Rodney,\ Pollington$
[۵۸] $Vaughan$
[۵۹] $Amoroso$
[۶۰] $cyclotomic$

۱۴.۴.۰ محک بورلینگ—نیمن

در ۱۹۵۰ نیمن [۶۱] یکی از شاگردان بورلینگ [۶۲] در پایان نامه اش ثابت می کند که فرض ریمان معادل با آنست که بگوئیم $\mathcal{N}_{(\prime,\infty)}$ در $L^{۲}(۰,۱)$ چگال است. $\mathcal{N}_{(\prime,\infty)}$ عبارتست از فضای توابع

$$f(t) = \sum_{k=۱}^{n} c_k \rho(\theta_k/t)$$

که $\theta_k \in (۰,۱)$ و آنچنانکه $\sum_{k=۱}^{n} c_k = ۰$. بورلینگ ثابت کردکه عبارات زیر نسبت به عدد p که $۱ < p < \infty$ معادلند:

(۱) $\zeta(s)$ در ناحیهٔ $\sigma > ۱/p$ دارای صفری نمی‌باشد.

(۲) $\mathcal{N}_{(\prime,\infty)}$ در $L^p(۰,۱)$ چگال است.

(۳) تابع مشخصهٔ $\chi_{(۰,۱)}$ در بستار $\mathcal{N}_{(\prime,\infty)}$ واقع در $L^p(۰,۱)$ قرار دارد.

۱۵.۴.۰ هم ارزی اعداد اول

همچنانکه اویلر در فرمول حاصلضربی اش ذکر کرده و نیز ریمان در مقاله ۸ صفحه‌ای اش در سال ۱۸۵۹ آورده[۷]، رابطه ای دوسوئی بین اعداد اول و تابع زتا وجود دارد. بنابراین هرگونه خاصیتی از یکی به دیگری مرتبط بوده و از این رو برای اثبات فرض ریمان از اعداد اول نیز می‌توان بهره گرفت.

۱۶.۴.۰ هم ارزی در فضاهای توابع

با ارائهٔ مقاله ای از وینر [۶۳] با عنوان قضایای تاوبری [۶۴] [٦] تعدادی از توابع تحلیلی هم‌ارز با فرض ریمان ثابت شدند. بالازارد اخیراً تحقیقی عمیق از آن توابع را ارائه داده است [۵].

۱۷.۴.۰ فرض لیندلف

فرض لیندلف [۶۵] ادعا می کند که $\zeta(\frac{۱}{۲} + it) \ll t^{\varepsilon}$ برای همهٔ $\varepsilon > ۰$. در واقع این نتیجه‌ای از فرض ریمان است.

---

[۶۱] $B.\ Nyman$
[۶۲] $B.\ Nyman$
[۶۳] $Wiener$
[۶۴] $TauberianTheorems$
[۶۵] $Lindelof\ Hypothesis$

۱۸.۴.۰ محک قطعی ویل

آندره ویل [۶۶] فرمول مشخص زیر، که رابطه‌ای بین صفرها و اول هاست را ثابت کرد. فرض کنید h تابعی زوج و هولومورفیک [۶۷] در ناحیه $|\Im t| \leq ۱/۲ + \delta$ و در رابطه $h(t) = O((۱ + |t|)^{-۲-\delta})$ برای تمام $\delta > ۰$ ها صدق کند. فرض کنید

$$g(u) = \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) e^{-iur}\ dr.$$

سپس دوگانگی زیر بین اول ها و صفرها وجود دارد.

$$\sum_{\gamma} h(\gamma) = ۲h(\frac{i}{۲}) - g(۰) \log \pi + \frac{۱}{۲\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(r) \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} ir) dr - ۲ \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n}} g(\log n).$$

در این فرمول صفر بصورت $\rho = ۱/۲ + i\gamma$ نوشته می شود که $\gamma \in \mathbb{C}$. البته فرض ریمان بیان می کند که همه γها حقیقی هستند. با استفاده از این دوگانگی ویل محک زیر را برای RH بیان نمود که تحت عنوان تظریف بمبیری [۶۸] شناخته می شود. غلاوه بر این ویل نشان داد که فرض ریمان برای توابع میدان [۶۹] درست است [۱۸و ۲۸و ۴۸].

۱۹.۴.۰ تظریف بمبیری

بمبیری نسخه زیر را از محک ویل بیان نمود. فرض ریمان برقرار است اگر وتنها اگر

$$\sum_{\rho} \hat{g}(\rho) \hat{\overline{g}}(۱ - \rho) > ۰$$

برای هر مقدار مختلط $g(x) \in C_{۰}^{\infty}(۰, \infty)$ که با ۰ همانی نیست، و در آن

$$\hat{g}(s) = \int_{۰}^{\infty} g(x) x^{s-۱}\ dx$$

۲۰.۴.۰ جملهٔ خطا در قضیهٔ اعداداول

فرض ریمان معادل با گزاره های زیر است: برای هر ϵ، عدد $\pi(x)$ از اعداد اول کمتر از x برابر است با

$$Li(x) + O(x^{۱/۲+\epsilon})$$

[۶۶] $Andre\ Weil$
[۶۷] $holomorphic$
[۶۸] $Bombieri$
[۶۹] Feild Functions

که Li عبارتست از تابع «انتگرال لگاریتمی» که بصورت زیر تعریف می شود:

$$Li(x) := \int_{\circ}^{x} \frac{dt}{\log t}$$

می توان گفت که از این عبارت نتیجه می شود که اولین نیم رقم‌های nامین عدد اول آنهائی هستند که $Li^{-1}(n)$.

۲۱.۴.۰ نظریهٔ‌تحلیلی‌اعداد

همانگونه که ذکر شد بررسی صفرهای تابع ریمان منوط به بررسی جمله خطا در قضیهٔ اعداد اول است. ابتدا تابع فون منگولت [۷۰] را بصورت زیر معرفی می کنیم:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{اگر } n = p^k \\ \circ & \text{درغیراینصورت} \end{cases}$$

که p عدد اول است. بنابراین

$$\begin{aligned} \psi(X) :=& \sum_{n \leq X} \Lambda(n) \\ =& Li(X) + O(X^{\sigma_\circ + \varepsilon}) \end{aligned}$$

اگر و فقط اگر $\zeta(s)$ در ناحیه $\sigma > \sigma_\circ$ صفر نشود. از آنجا که $Li(X)$ «انتگرال لگاریتمی» است بصورت

$$Li(X) = \int_{۲}^{X} \frac{dt}{\log t}$$

است، بخصوص بهترین جمله خطای ممکن در قضیهٔ اعداد اول $O(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$ است، که معادل با فرض ریمان است. برای $L-$توابع هنوز رابطه ای بین پخش اعداد اول و فرض ریمان نشان داده نشده است.

۲۲.۴.۰ جمع مقسوم علیه های n

فرض کنید

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

[۷۰] $Von\ Mangoldt$

مجموع مقسوم علیه های n باشد. روبین [۷۱] نشان داد که فرض ریمان معادل است با

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n$$

برای تمام $n \geq ۵۰۴۱$. که γ ثابت اویلر است. بهتر از این گرون وال [۷۲] نشان داد که

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n\log\log n} = e^{\gamma}$$

و روبین [۷۳] بدون شرط، برای $n \geq ۳$ نشان داد که

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n + ۰.٦۴۸۲ \frac{n}{\log\log n}$$

لاگاریاس [۷۴] با دقت بسیار روی کار روبین نشان داد که فرض ریمان معادل است با

$$\sigma(n) < H_n + \exp(H_n)\log(H_n)$$

برای $n \geq ۲$، که H_n عدد همساز برابر

$$H_n = \sum_{j=۱}^{n} \frac{۱}{j}$$

بوده و طبق تعریف

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} H_n - \log n$$

بنابراین نامعادلات لاگاریاس و روبین از یک شیوه پیروی می کنند (تصویر $Hn.gif$).

۲۳.۴.۰ شمارش صفرهای تابع

نمادگذاری را که بکار می بریم، شیوهٔ استانداردی برای شمارش صفرهای تابع زتاست. صفرهای تابع زتا در «نوار بدیهی» بصورت $\rho = \beta + i\gamma$ هستند که فرض می کنیم $\gamma > ۰$. حال تابع شمارنده را بصورت $N(T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma \;:\; ۰ < \gamma \leq T\}$

[۷۱] $G.\ Robin$
[۷۲] $Gronwall$
[۷۳] $Robin$
[۷۴] $J.\ Lagarias$

تعریف می کنیم. به عبارتی $N(T)$ صفرهای تابع را در نوار بدیهی تا ارتفاع T می شمارد. با معادله تابعی چنین نتیجه می گیریم

$$N(T) = \frac{1}{2\pi} T \log\left(\frac{T}{2\pi e}\right) + \frac{7}{8} + S(T) + O(1/T)$$

که

$$S(T) = \frac{1}{\pi} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

با استفاده از ارگومان ایجاد شده توسطتغییرات پیوسته در طول خط مستقیم از ۲ تا $2 + iT$ تا $\frac{1}{2} + iT$. فون منگولت [75] ثابت کرد که $S(T) = O(\log T)$ بدین ترتیب تعداد صفرهای تابع را بطور مساعدی تا ارتفاع T بدست می آید. توجه کنید که تقریب فون منگولت بیان می کند که صفر با ارتفاع کمتر از T دارای مرتبه ضربی $O(\log T)$ است. این بهترین نتیجه شناخته شده‌ایست که از مرتبه ضربی صفرها بدست آمده است. خیلی ها معتقدند همهٔ صفرها ساده هستند.

وابسته به این تابع شمارشی صفرها، توابع دیگری نیز معرفی شده اند که در ذیل دونمونه از آنها را می آوریم.

$$N_0(T) = \#\{\rho = \frac{1}{2} + i\gamma \ : \ 0 < \gamma \leq T\}$$

که صفرها را روی خط بدیهی تا ارتفاع T می شمارد و فرض ریمان معادل با آنست که $N(T) = N_0(T)$ برای تمام T. سلبرگ ثابت کرد که $N_0(T) \gg N(T)$. در حال حاضر بهترین تقریب بدست آمده عبارتست از $N_0(T) \geq 0.40219\, N(T)$ برای N های بقدر کافی بزرگ، که توسط کنری [76] ثابت شد. نمایش دوم عبارتست از

$$N(\sigma, T) = \#\{\rho = \beta + i\gamma \ : \ \beta > \sigma \ and \ 0 < \gamma \leq T\}$$

که تعداد صفرها را در نوار بدیهی تا ارتفاع T و از راست تا خطσ می شمارد. فرض ریمان معادل با این ادعاست که $N(\frac{1}{2}, T) = 0$ برای هر T.

۲۴.۴.۰ فرض چگالی

فرض چگالی مدعی است که

$$N(\sigma, T) = O(T^{2(1-\sigma)+\varepsilon})$$

[75] $Von\ Mangoldt$
[76] $Conrey$

بازای هر $\varepsilon > 0$. توجه کنید که این تنها وقتی غیربدیهی است که $\sigma > \frac{1}{2}$. این فرض که از فرض لیندلف نتیجه می شود، در واقع از آن جهت حائز اهمیت است که میزان شکاف بین اعداد اول متوالی را بررسی می کند. این فرض به قدرت فرض ریمان می باشد. نتایجی از $N(\sigma, T)$ عموماً از مقدار متوسط تابع زتا بدست آمده است.

۲۵.۴.۰ فرض ۱۰۰ درصد

فرض ۱۰۰ درصد برای تابع $L(s)$ بیان می کند که $N_0(T) \sim N(T)$ که $N(T)$ تابع شمارنده صفر برای $L(s)$ بوده و $N_0(T)$ تنها صفرها را بر خط حقیقی می شمارد. بعبارت دیگر ۱۰۰ درصد صفرهای غیر بدیهی (از نظر چگالی) بر خط بدیهی واقعند. گزاره‌ای در این باره وجود دارد که $N(T) - N_0(T) = o(T \log T)$. این فرض ۱۰۰ درصد عددی استاندارد نیست زیرا هنوز تعدد واقعی صفرها بر خط بدیهی آشکار نگردیده است.

۲۶.۴.۰ صفرهای چندجمله‌ای دیریکله

تورن[۷۷] نشان داد که اگر برای Nهای بقدر کافی بزرگ،Nامین مجموع جزئی $\zeta(s)$ در$\sigma > 1$ صفر نشود، آنگاه فرض ریمان برقرار است. وی این محک را چنین تقویت کرد که برای هر $\epsilon > 0$ یک $N_0(\epsilon)$ چنان است که اگر N امین مجموع جزئی

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s}$$

در ناحیه $\sigma > 1 + N^{-1/2+\epsilon}$ برای همهٔ $N > N_0(\epsilon)$ دارای صفری نشود، آنگاه فرض ریمان برقرار است. مونت گومری[۷۸] ثابت کرد که این شیوه کارائی ندارد، زیرا برای هر عدد مثبت $c < 4/\pi - 1$، Nامین مجموع جزئی $\zeta(s)$ در نیم صفحه $\sigma > 1 + c(\log\log N)/\log N$ همواره دارای صفر است.

۵.۰ سری ها

۱.۵.۰ سری دیریکله

برای $\Re(s) > 1$ سری دیریکله [۷۹] چنین تعریف می شود:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

[۷۷] $Turan$
[۷۸] $H.\ Montgomery$
[۷۹] $Dirichlet\ series$

۲.۵.۰ ادامه تحلیلی

$F(s)$ به یک تابع مرومورفیک [۸۰] چنان توسیع می یابد که برای هر عدد صحیح مثبت m، $(s-1)^m F(s)$ تابعی تام از مرتبه متناهی است.

۳.۵.۰ معادله تابعی

وجود دارد یک $Q > 0$ و $\alpha_j > 0$ و $\Re(r_j) \geq 0$ معادلهٔ

$$\Phi(s) := Q^s \prod_{j=1}^{d} \Gamma(\alpha_j + r_j) F(s)$$

در $\Phi(s) = \varepsilon \overline{\Phi}(1-s)$ صدق می کند که در آن $|\varepsilon| = 1$ و $\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\overline{z})}$

۴.۵.۰ حاصلضرب اویلر

$$F(s) = \prod_p F_p(s)$$

که حاصلضرب روی اول های گویاست. اینجا

$$F_p(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{p^k}}{p^{ks}}\right)$$

با $b_n \ll n^\theta$ برای برخی $\theta < \frac{1}{2}$. توجه کنید که این نتیجه می دهد که $a_1 = 1$ بنابراین $F(s) = 1$ در کلاس سلبرگ تنها یک تابع ثابت است.

۵.۵.۰ فرض رامانوجان

بنابر فرض رامانوجان [۸۱] داریم $a_n \ll n^\varepsilon$ بازای هر $\varepsilon > 0$.

---

[۸۰] *meromorphic*
[۸۱] *Ramanujan Hypothesis*

۶.۵.۰ میانگین

این جملات معادل دارای شکل زیرند:

$$\sum_{n\leq x} f(n) = F(x) + O(x^{\alpha+\epsilon}), \quad x \to +\infty$$

که f تابعی حسابی، $F(x)$ یک تقریب منعطف [۸۲] به $\sum_{n\leq x} f(n)$ و α یک عدد حقیقی است.

۷.۵.۰ محک سالم

سالم[۸۳] ثابت کرد که صفر نشدن تابع $\zeta(s)$ روی خط σ معادل با کامل بودن در$L^1(0,\infty)$ از $\{k_\sigma(\lambda x),\ \lambda > 0\}$ جائیکه

$$k_\sigma(x) = \frac{x^{\sigma-1}}{e^x + 1}.$$

۸.۵.۰ یک مسئله آرامش‌بخش

بیز–دوارت [۸۴] اخیرا ثابت کرده که فرض ریمان معادل با این ادعاست که

$$\inf_{A_N(s)} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - A_N(1/2+it)\zeta(1/2+it|^2)\ \frac{dt}{\frac{1}{4}+t^2}$$

مایل به صفر است وقتی که $N \to \infty$ که در آن $A_N(s)$ می تواند هر چند جمله ای دیریکله از هر طول N باشد:

$$A_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^s}.$$

. قبلا بیز–دورات، بالازارد [۸۵]، لاندروکس[۸۶] سایاس [۸۷] نوشته بودند که به عنوان یک دنباله از محک نیمن–بورلینگ ادعای فوق RH را نتیجه می دهد.

---

[۸۲] smooth approximation
[۸۳] R. Salem
[۸۴] Baez – Duarte
[۸۵] Balazard
[۸۶] Landreaux
[۸۷] Saias

۹.۵.۰ محک اسپی‌سر

اسپی‌سر[۸۸] [۱٦] ثابت کرده بود که فرض ریمان معادل است با صفرنشدن مشتق $\zeta'(s)$ در نیم ناحیه چپ نوار بحرانی $۱/۲ > \sigma > ۰$ لووینسون و مونت گومری [۸۹] یک نسخه کمیّ و تناوبی از این نتیجه را ارائه دادند که به کشف لوینسون از این روش برای شمارش صفرها روی خط بحرانی راهنمائی می کرد. او سپس ثابت کرد که حداقل $\frac{۱}{۳}$ صفرهای زتا بر روی خط بحرانی قرار دارند.

۱۰.۵.۰ وولچکوف

وولچکوف [۹۰] اخیرا ثابت کرده است که RH معادل است با معادلهٔ

$$\int_{۰}^{\infty}\int_{۱/۲}^{\infty}\frac{۱-۱۲y^{۲}}{(۱+۴y^{۲})^{۳}}\log(|\zeta(x+iy)|)\;dx\;dy=\pi\frac{۳-\gamma}{۳۲}$$

۱۱.۵.۰ تخمین های دقیق بیشتر

RH معادل با بیان زیر است [۱۵]

$$\pi(x)-li(x)=O(\sqrt{x}\log x)$$

شوئنفلد [۹۱] در ۱۹۷٦ یک نسخه ساده عددی از آن را بشکل زیر بیان نمود:

$$|\pi(x)-li(x)|\leq\frac{\sqrt{x}\log x}{۸\pi},\quad x\geq ۲٦۵۷$$

---

[۸۸] *A. Speiser*
[۸۹] *Levinson and Montgomery*
[۹۰] *V. V. Volchkov*
[۹۱] *L.Schoenfeld*

۱۲.۵.۰ تابع فون منگولت

تابع فون منگولت[۹۲] $\Lambda(n)$ چنین تعریف می شود که اگر n توانی ازیک عدد اول p باشد برابر $\log p$ و صفر در سایر حالات.

حال چنین تعریف می کنیم

$$\psi(x) := \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$$

RH با هر کدام از عبارات زیر معادل است:

$$\psi(x) = x + O(x^{۱/۲+\epsilon})$$

برای هر $\epsilon > ۰$؛

$$\psi(x) = x + O(x^{۱/۲}\log^{۲} x)$$

و

$$|\psi(x) - x| \leq \frac{x^{۱/۲}\log^{۲} x}{۸\pi}, \quad x > ۷۳.۲$$

۱۳.۵.۰ تابع موبیوس

تابع موبیوس[۹۳] چنین تعریف می شود:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-۱)^r & \text{اگر } n \text{ حاصلضرب } r \text{ عدد اول مجزا باشد} \\ ۰ & \text{اگر } n \text{ مربع یک عدد اول را بشمارد} \end{cases}$$

تعریف کنید:

$$M(x) := \sum_{n\leq x} \mu(n)$$

RH معادل با هر کدام از عبارات زیر است:

$$M(x) \ll x^{۱/۲+\epsilon}$$

[۹۲] $von\ Mangoldt$
[۹۳] $Mobius\ function$

برای هر ϵ مثبت؛

$$M(x) \ll x^{1/2} \exp(A \log x / \log\log x)$$

برای یک A مثبت؛ هر دو نتیجه از لیتلوود هستند.

۱۴.۵.۰ مرتبه حداکثر یک عنصر در گروه متقارن

فرض کنید $g(n)$ بیشینه مرتبه یک جایگشت n شیء باشد و $\omega(k)$ تعداد مقسوم علیه های اول مجزای عدد صحیح k و Li لگاریتم انتگرال باشد. RH معادل با هر کدام از عبارات زیر برای nهای بقدر کافی بزرگ است:

$$\log g(n) < \sqrt{Li^{-1}(n)}$$

$$\omega(g(n)) < Li(\sqrt{Li^{-1}(n)})$$

این نتایج از ماسیاس [۹۴]، نیکولاس [۹۵] و روبین [۹۶] است.

۱۵.۵.۰ مقادیر بزرگ

RH معادل با چند نامساوی به شکل زیر است.

$$f(n) < F(n)$$

که f تابعی حسابی و منظم و F تحلیلی و منظم است.

۱۶.۵.۰ تابع اویلر

تابع اویلر $\phi(n)$ عبارتست از تعداد اعداد صحیح کمتر از n که نسبت به n اولند. فرض کنید N_k حاصلضرب k عدد اول باشد و γ ثابت اویلر باشد. RH معادل با هر کدام از عبارات زیر است:

$$\frac{N_k}{\phi(N_k)} > e^{\gamma} \log\log N_k$$

---

[۹۴] $Massias$
[۹۵] $Nicolas$
[۹۶] $Robin$

برای هر k،

$$\frac{N_k}{\phi(N_k)} > e^{\gamma} \log\log N_k$$

برای هر kی بجز تعداد متناهی. این نتایج از نیکولاس [۹۷] است.

۶.۰ حمله ناموفق به فرض ریمان

از آنجا که فرض ریمان ثابت نشده و در ناحیه بحرانی نیز داشتن صفر بطور کلی مشخص نیست و نیز با توجه به اینکه یافتن تعداد زیاد صفرها با کامپیوترها دلیل بر اثبات فرض ریمان نمی باشد، لذا امکان رد شدن این فرض نیز وجود دارد. چنین تلاشهائی برای رد فرض ریمان را تحت عنوان «حمله» یاد می کنند. همچنانکه گفته شد معادل سازی های زیادی برای فرض ریمان بدست آمده، بنابراین رد شدن یکی از این هم ارزی ها، رد RH است.

در اواخر دهۀ ۱۹۴۰ رادماچر[۹۸] اثبات غلطی را از اشتباه بودن فرض ریمان مطرح کرد که در مجلۀ تایمز به چاپ رسید. غلط بودن این گفته رادماچر توسط سیگل اثبات شد [۲۰و۲۵].

۷.۰ کاربرد در فیزیک

نمونه برداریهای موضعی قسمتهای موهومی γ_n از صفرهای مختلط تابع زتای ریمان، همان مقدار پخشی را نشان می دهند که در مقدار ویژۀ ماتریس تحلیل رفته تصادفی از گروه یکۀ متصف به اندازۀ هار [۹۹] دیده می‌شود. این مجموعه از ماتریس ها در فیزیک CUE [۱۰۰] نامیده می شود.

کراندال [۱۰۱] تابع زتای کوانتوم را چنین تعریف می کند

$$Z(s) = \sum \frac{1}{E^s}$$

که مجموع روی انرژی های تکین سیستم کوانتومی تغییر می کند و هدف، ارزیابی $Z(s)$ می باشد. این تابع ملازم نزدیک $\zeta(s)$ بوده و متعاقب تعیین دقیق $Z(s)$، مسائل بازی در فیزیک مطرح می کند که مطالب و جزئیات بیشتر در مورد آن را میتوانید

[۹۷] $Nicolas$
[۹۸] $H. Rademacher$
[۹۹] $Haar\ measure$
[۱۰۰] $Circular\ Unitary\ Ensemble$
[۱۰۱] $Richard\ E.\ Crandall$

در [۵۱] بخوانید.

```
{N+}
ProgramZetaValue;
Var
s, n, i, k, p : Longint;
Sum, Power, m : Extended;
Begin
Fors := ۲To۳۰Do
Begin
m := ۱;
Fori := ۱TosDo
m := m * PI;
Sum := ۰;
Fork := ۱To۱۰۰۰۰۰۰۰۰Do
Begin
Power := ۱;
Fori := ۱TosDo
Power := Power * k;
Sum := Sum + ۱/Power;
End;
Writeln('Zeta(', s, ') =', Sum : ۰ : ۲۰, 'Alpha(', s, ') =', m/Sum : ۰ : ۲۰);
End;
Writeln('Finished.PressEnter');
```

```
Readln;
End.
{N+}
Program ZetaValue;
Var
s,n,i,k,p:Longint;
Sum,Power,m:Extended;
F:Text;
Begin
Assign(F,'zeta.txt');
Rewrite(F);
For s:=41 To 60 Do
Begin
m:=1;
For i:=1 To s Do
m:=m*PI;
Sum:=0;
For k:=1 To 100000 Do
Begin
Power:=1;
For i:=1 To s Do
Power:=Power*k;
Sum:=Sum+ 1 / Power;
```

```
End;
Writeln(F,'Zeta(',s,')= ',Sum:0:20,' Alpha(',s,')= ',m/Sum:0:20);
End;
Writeln('Finished.Press Enter');
close(F);
Readln;
End.
```

کتاب‌نامه

[1] *www.mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html*, 2000, 2001, 2003.

[2] M. Riesz,*Sur l'hypothese de Riemann*, Acta Math. 40(1916), 185-190.

[3] *http://www.aimath.org/wwn/rh/articles/html/index.html.*

[4] Emil Artin,*The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, 1964.

[5] M.Balazard,*Surveys in Number Theory*, Papers from the Millenial Conference on Number Theory, A. K. Peters, 2003.

[6] Wiener,*Tauberian Theorems*, Annals of Math, 1932.

[7] *A translate of Riemann paper find in Address www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf.*

[8] Tom M. Apostol,*Analytically Number Theory*,v.I, 1973.

[9] Hardy and Littlewood, Acta Mathematica 41, 1918, pp 119-196.

[10] G. Polya,*Collected Works*, Volume 2, Paper 102, section 7.

[11] Charles Newman,*building on work of deBruijn.*

[12] J. Reine, Angew. Math. 144, 1914, 114-165.

[13] Lagarias'paper, Acta Arithmetica,*www.research.att.com/jcl/doc/positivity.ps.*

[14] *Math Annahlen 110 (1934) 514-521.*

[15] Von Koch, Acta Mathematica 24 (1901), 159-182.

[16] Ayoub Raymond,*Euler and the zeta function*, Amer.Math. Monthly, 81(1974) 1067.

[17] Balazard, M. and Saias, E. "The Nyman-Beurling Equivalent Form for the Riemann Hypothesis." Expos. Math. 18, 131-138, 2000.

[18] Ball, W. W. R. and Coxeter, H. S. M. Mathematical Recreations and Essays, 13th ed. New York: Dover, p. 75, 1987.

[19] Bombieri,
E. *Problems of the Millennium: The Riemann Hypothesis. http://www.claymath.org/Millennium-Prize-Problems/Riemann-Hypothesis/-objects/Official-Problem-Description.pdf.*

[20] Borwein, J. and Bailey, D. Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. Natick, MA: A. K. Peters, pp. 66-68, 2003.

[21] Brent, R. P. "On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip." Math. Comput. 33, 1361-1372, 1979.

[22] Brent, R. P.; van de Lune, J.; te Riele, H. J. J.; and Winter, D. T. "On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip. II." Math. Comput. 39, 681-688, 1982.

[23] Caldwell, C. K. "Prime Links++." http://primes.utm.edu/links/theory/conjectures/Riemann/.

[24] Clay Mathematics Institute.*The Riemann Hypothesis. http://www.claymath.org/Millennium-Prize-Problems/Riemann-Hypothesis/.*

[25] Conrey, J. B. *The Riemann Hypothesis.* Not. Amer. Math. Soc. 50, 341-353, 2003.*http://www.ams.org/notices/200303/fea-conrey-web.pdf.*

[26] Csordas, G.; Smith, W.; and Varga, R. S. "Lehmer Pairs of Zeros, the de Bruijn-Newman Constant and the Riemann Hypothesis." Constr. Approx. 10, 107-129, 1994.

[27] du Sautoy, M. The Music of the Primes: Searching to Solve the Greatest Mystery in Mathematics. New York: Harper-Collins, 2003.

[28] Eichler, M. Introduction to the Theory of Algebraic Numbers and Functions. New York: Academic Press, 1966.

[29] Granville, A. "Prime Possibilities and Quantum Chaos." 2002. http://www.msri.org/ext/Emissary/EmissarySpring02.pdf.

[30] Hardy, G. H. Ramanujan: Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work, 3rd ed. New York: Chelsea, 1999.

[31] Krantz, S. G. "The Riemann Hypothesis." section13.2.9 in Handbook of Complex Variables. Boston, MA: Birkh?user, p. 161, 1999.

[32] Lagarias, J. C. "An Elementary Problem Equivalent to the Riemann Hypothesis" 22 Aug 2000. http://arXiv.org/abs/math.NT/0008177/.

[33] Le Lionnais, F. Les nombres remarquables. Paris: Hermann, p. 25, 1983.

[34] Levinson, N. "More than One Third of Zeros of Riemann's Zeta-Function Are on ." Adv. Math. 13, 383-436, 1974.

[35] Levinson, N. "At Least One Third of Zeros of Riemann's Zeta-Function Are on ." Proc. Nat. Acad. Sci. USA 71, 1013-1015, 1974.

[36] Odlyzko, A. "The 1020th Zero of the Riemann Zeta Function and 70 Million of Its Neighbors."

[37] Riemann, G. F. B. "Uber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Gr?sse." Monatsber. K?nigl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 671-680, Nov. 1859.

[38] Reprinted in Das Kontinuum und Andere Monographen (Ed. H. Weyl). New York: Chelsea, 1972.

[39] Robin, G. "Grandes valeurs de la fonction somme des diviseurs et hypothese de Riemann." J. Math. Pures Appl. 63, 187-213, 1984.

[40] Sloane, N. J. A. Sequences A002410/M4924 in "The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences." http://www.research.att.com/ njas/sequences/.

[41] Smale, S. "Mathematical Problems for the Next Century." Math. Intelligencer 20, No. 2, 7-15, 1998.

[42] Smale, S. "Mathematical Problems for the Next Century." In Mathematics: Frontiers and Perspectives 2000 (Ed. V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax, and B. Mazur). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000.

[43] te Riele, H. J. J. "Corrigendum to: On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip. II." Math. Comput. 46, 771, 1986.

[44] van de Lune, J. and te Riele, H. J. J. "On The Zeros of the Riemann Zeta-Function in the Critical Strip. III." Math. Comput. 41, 759-767, 1983.

[45] van de Lune, J.; te Riele, H. J. J.; and Winter, D. T. "On the Zeros of the Riemann Zeta Function in the Critical Strip. IV." Math. Comput. 46, 667-681, 1986.

[46] Vardi, I. Computational Recreations in Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, 1991.

[47] Wagon, S. Mathematica in Action. New York: W. H. Freeman, p. 33, 1991.

[48] Weil, A. Sur les courbes algebriques et les varietes qui s'en deduisent. Paris, 1948.

[49] Wells, D. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. Middlesex, England: Penguin Books, p. 28, 1986.

[50] ZetaGrid Homepage. http://www.zetagrid.net/.

[51] Richard E. Crandall,*J.Phys.A: Math.Gen 29(1996) 6795-6816. Printed in the U.K.* My file: A6-Zeta.pdf

[52] klg

[۵۳] تام م. آپوستل، آنالیز ریاضی، ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

[۵۴] تام م. آپوستل، نظریه تحلیلی اعداد، ترجمه علی‌اکبر عالم‌زاده، علی‌اکبر رحیم‌زاده، ج ۱، چاپ دوم، ۱۳۷۶.